Exercices - Nombres complexes

I Premiers calculs

Exercice 1

1. L'équation : $x^2 + 1 = 0$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Supposons que :
   - il existe un nombre, noté i, n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, tel que $i^2 = -1$.
   - les règles de calculs concernant les nombres réels fonctionnent encore avec le nombre i.

   (a) Déterminer les solutions (imaginaires) de l'équation $x^2 + 1 = 0$ en fonction de i.

   (b) Déterminer les solutions (imaginaires) de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ en fonction de i.

2. En fonction de i, calculer :

   (a) $(-i)^2, i^3, i^4, i^5, i^{2018}$

   (b) $(1+i)^2$ et $(1-i)^2$

   (c) $(1+i)^2 + (1-i)^2$, $(1+i)^2 - (1-i)^2$ et $(1+i)^3$

   (d) $(1+i) + (2-3i)$; $(1+i) - (2-3i)$; $(1+i)(2-3i)$

3. Plus généralement, pour tous réels a, b, a' et b', on pose : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
   Mettre sous la forme $A + iB$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$:

   (a) $z + z'$

   (b) $z - z'$

   (c) $z \times z'$

4. (a) Déterminer l'inverse de i, c'est à dire écrire $\dfrac{1}{i}$ sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

   (b) Même question pour l'inverse de $1 + i$, c'est à dire $\dfrac{1}{1+i}$. (Il s'agit de trouver une méthode de calcul en utilisant le nombre $1 - i$).

   (c) On pose $Z = \dfrac{\sqrt{2} + i}{1 - 2i}$. Mettre le nombre Z sous la forme $\alpha + \beta i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 1

1.(a) $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2-(-1)=0 \Leftrightarrow x^2-i^2=0 \Leftrightarrow (x-i)(x+i)=0 \Leftrightarrow x=i$ ou $x=-i$.
L'équation a donc deux solutions imaginaires : i et $-i$.

(b) $x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2\times\frac{1}{2}x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)(-1)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}i^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

L'équation a donc deux solutions imaginaires : $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2.(a)
- $(-i)^2=(-1)^2i^2=i^2=-1$
- $i^3=i^2i=(-1)i=-i$
- $i^4=i^2i^2=(-1)\times(-1)=1$
- $i^5=(i^2)^2\times i=(-1)^2i=i$
- Pour i^{2018}, $2018=4\times504+2$ donc $i^{2018}=i^{4\times504+2}=(i^4)^{504}\times i^2=1^{504}\times(-1)=-1$

(b)
- $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$
- $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$

(c)
- $(1+i)^2+(1-i)^2=2i-2i=0$
- $(1+i)^2-(1-i)^2=2i+2i=4i$
- $(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=2i+2i^2=-2+2i$

(d)
- $(1+i)+(2-3i)=1+2+i-3i=3-2i$
- $(1+i)-(2-3i)=1-2+i+3i=-1+4i$
- $(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=2-i+3=5-i$

3.(a) $z+z'=(a+ib)+(a'+ib')=a+a'+ib+ib'=(a+a')+i(b+b')$

(b) $z-z'=(a+ib)-(a'+ib')=a-a'+ib-ib'=(a-a')+i(b-b')$

(c) $z\times z'=(a+ib)(a'+ib')=aa'+aib'+iba'+i^2bb'=aa'-bb'+i(ab'+ba')$

4.(a) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

(b) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

(c) $Z=\frac{\sqrt{2}+i}{1-2i}=\frac{(\sqrt{2}+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+i+2i^2}{1-4i^2}=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+i-2}{5}=\frac{\sqrt{2}-2}{5}+\frac{2\sqrt{2}+1}{5}i$

II Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

Exercice 2
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

1. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$ **2.** $2z+\overline{z} = 2+3i$ **3.** $2z+2\overline{z} = 2+3i$

Exercice 3
Dans $\mathbb{C}$, on appelle « racine carrée » d'un nombre complexe z le nombre complexe z' tel que $z'^2 = z$.
Calculer la « racine carrée » de $z = 3+4i$.
Indication : On posera $z' = a+ib$ et on calculera z'^2 et $|z'^2|$.

III Équations du second degré

Exercice 4
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **2.** $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$ **3.** $z^2 - (7+i)z + 12 + 3i = 0$

Exercice 5
On cherche à résoudre l'équation
$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$$

1.(a) Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation.
(b) Déterminer les réels b et c tels que :
$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z-ai)(z^2+bz+c)$$
(c) En déduire les solutions de l'équation.
2. De même, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.
3. Résoudre l'équation $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$.

Exercice 6
On pose, pour tout nombre complexe z, $P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + \alpha z - 13i$ où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $P(i) = 0$.

   Dans la suite on prendra la valeur de α obtenue.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z : $P(z) = (z-i)(z^2+az+b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 7
On pose, pour tout nombre complexe z, $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

1. Calculer $P(-1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z : $P(z) = (z+1)(z^2+az+b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\begin{cases} z+z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z+z' = 5 \\ zz' = 6,5 \end{cases}$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 72z + 153 = 0$.
On montrera d'abord que cette équation admet deux solutions imaginaires pures

Exercice 10
On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1 = 0$.

1. Développer $(1-\sqrt{2})^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
3. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z + \dfrac{1}{z} = 1$ puis $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$.
4. Notons $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par :
$$P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$$
.
Vérifier que pour tout z non nul, on a $\dfrac{P(z)}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$

IV Représentation géométrique

Exercice 11

1. On considère le nombre complexe $z = -2 + i$. Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.
2. On considère le nombre complexe $z = 3 - 2i$. Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives $2z$, $i - z$, iz et $z - \overline{z}$.

Exercice 12

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 1 - i$ et $c = 2 - 3i$.

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer l'affixe de I le milieu de $[AC]$.
3. Déterminer l'affixe de G le barycentre du système $\{(A, 3), (B, -5), (C, 1)\}$.

Exercice 13

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + 4i$, $b = 1 + i$ et $c = \dfrac{1}{3} - i$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 14

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i$, $b = 5 - i$ et $c = 3i + 1$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'affixe de D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives -1, $2 + i\sqrt{3}$, $2 - i\sqrt{3}$ et 3.
2. Calculer les distances AB, BC et CA. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$.
   En déduire la nature du triangle ADC.

Exercice 16

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 - 3i$, $b = 3 - 5i$ et $c = 7 + 3i$.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire du triangle ABC ? Justifier la réponse.
3. On appelle D le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Déterminer la nature de BCD.
4. Justifier que A, B, C et D sont cocycliques et déterminer le centre et le rayon du cercle.

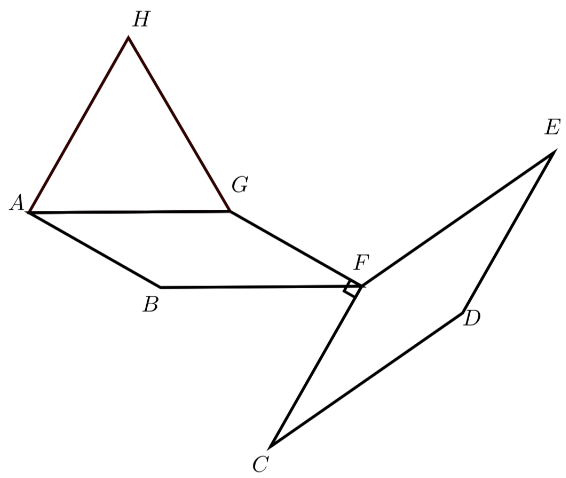
V Produit scalaire et angles orientés

Exercice 17

1. ABC est un triangle équilatéral direct, CDA est un triangle direct, rectangle et isocèle en C, BEC est un triangle direct, rectangle et isocèle en B et K est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{BEC}$ et de (BC). Faire une figure.
2. Déterminer, en justifiant, une mesure en radians de l'angle $\widehat{EKC}$.
3. Calculer la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{KE})$.
4. Les droites (AD) et (EK) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 18

Sur la figure ci-dessous, $ABFG$ et $CDEF$ sont deux parallélogrammes et AGH un triangle équilatéral direct tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FC}) = \dfrac{\pi}{2}$.



1. Donner la mesure de chacun des trois angles : $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$, $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{CF})$.
2. Prouver que (AH) et (AB) sont perpendiculaires.
3. Établir que $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{ED}) = \pi$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 19

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. On note I le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de I sur (AC) et J le milieu de $[IH]$. On souhaite montrer de deux façons différentes que les droites (AJ) et (BH) sont perpendiculaires.

1. <u>Première méthode</u> :
   (a) Établir que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IH}$.
   (b) Établir que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{BI}$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH}$.
   (d) Conclure.
2. <u>Deuxième méthode</u> : Soit K le milieu de $[HC]$.
   (a) Montrer que J est l'orthocentre du triangle AIK.
   (b) En déduire que les droites (AJ) et (BH) sont perpendiculaires.

Exercice 20
Soient $ABCD$ un carré de côté a. On note I, J et M les milieux respectifs des segments : $[AB]$, $[AD]$ et $[AI]$ puis H le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).

On se propose de démontrer, de trois façons différentes, que (JH) et (HM) sont perpendiculaires.

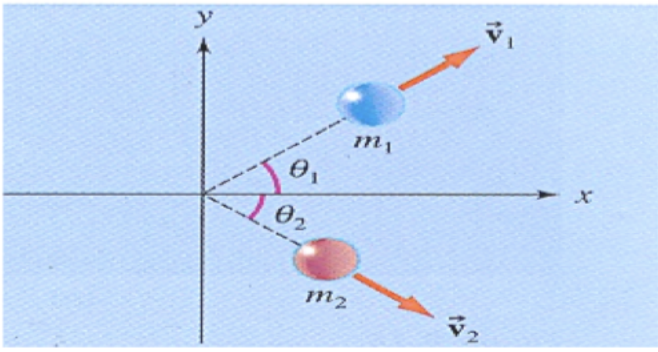
1. Première méthode : Calculer les longueurs HM, HJ et MJ en fonction de a. Conclure.
2. Deuxième méthode :
   (a) Montrer que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HI}=2\overrightarrow{HM}$ et que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HJ}$.
   (b) En déduire que $4\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HJ}=HA^2+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$.
   (c) Conclure.
3. Troisième méthode : On considère le repère orthonormal $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
   (a) Déterminer une équation de la droite (DI) et de la droite (AH).
   (b) En déduire les coordonnées de H et conclure.

Exercice 21
Soit ABC un triangle et soit $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de A du triangle ABC coupe $[BC]$ en H et $\mathcal{C}$ en D. Le but de l'exercice est de montrer que la médiane issue de H du triangle HAC est aussi la hauteur du triangle HBD.

1. On note A' le point diamétralement opposé à A et O le entre de $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=HO^2-OA^2$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.
2. Soit I le milieu de $[AC]$, montrer que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{BD}=0$

Exercice 22
Une bille B_1 de masse M, lancée à une vitesse $\overrightarrow{V}$, heurte une bille immobile B_2 de masse m.

Après le choc, les billes B_1 et B_2 partent avec des vitesses $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ dans des directions déterminées respectivement par les angles $\theta_1=30°$ et $\theta_2=45°$ par rapport (B_1B_2) avant le choc.



Exprimer $\|\overrightarrow{v}_1\|$ et $\|\overrightarrow{v}_2\|$ en fonction de M, m et $\|\overrightarrow{V}\|$.

Indication : considérer l'égalité vectorielle qui exprime la conservation de la quantité de mouvement : $M\overrightarrow{V}=M\overrightarrow{v_1}+m\overrightarrow{v_2}$ puis projeter sur deux axes bien choisis.

VI Angles et arguments

Exercice 23
Faire autrement la question 2. de l'exercice 16

Exercice 24

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$.
2. Dans le plan complexe, on considère A, B, C et P d'affixes respectives $a = \frac{3}{2} + 6i$, $b = \frac{3}{2} - 6i$, $c = -3 - \frac{1}{4}i$ et $p = 3 + 2i$, ainsi que le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.
   (a) Faire une figure (on prendra 1 cm comme unité graphique).
   (b) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image de B par la translation de vecteur $\vec{w}$.
   (c) On note R et S les points d'affixes respectives $-5 - i$ et $-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.
   Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
   (d) Calculer $\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QR}$ à l'aide des affixes et déduire la nature de $PQRS$.
   (e) Démontrer que P, Q, R et S appartiennent à même cercle C dont on précisera le centre et le rayon.
   (f) La droite (AP) est- elle tangente à C ? Justifier la réponse.

Exercice 25
Soit A, B et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 1 + i$.

1. Faire une figure. On prendra 2 cm comme unité graphique.
2. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 26
On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\frac{1}{2}i$ et $b = 1 + i$.
On considère l'application f du plan qui à tout point M distinct de B d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2iz - 1}{2i - (1 + i)z}$$

1. Exprimer les modules des complexes $2iz - 1$ et $2i - (1 + i)z$ en fonction de AMet BM.
2. Déterminer géométriquement l'ensemble E ds points du plan tel que module e z' soit égal à $\sqrt{2}$. Donner une équation cartésienne de E (on utilisera le produit scalaire).
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que $(\vec{u}; \overrightarrow{OM} = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

Exercice 27
<u>Exercices dans les annales</u> (voir apmep) :

1. Amérique du sud 2017.
2. France métropolitaine 2011.
3. Antilles Guyane 2012.
4. Nouvelle Calédonie 2012.
5. Antilles Guyane 2011.
6. Centres étrangers 2010.
7. Rochambeau 2010.